4 Géométrie vectorielle dans l'espace

Aperçu historique :

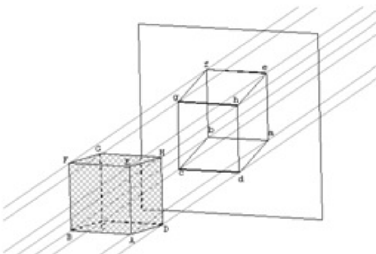
Les pyramides Égyptiennes et les systèmes d'irrigation de l'antiquité témoignent d'une connaissance au moins empirique de la géométrie de l'espace. C'est EUCLIDE*, dans ses "Éléments", qui a formalisé les notions de point, de droite et de plan, et établi les règles d'incidence que nous allons étudier. L'architecture de la Renaissance utilisera beaucoup les travaux d'Euclide. La géométrie d'Euclide a aussi beaucoup d'applications en mécanique newtonienne, par exemple. Mais cette géométrie, dite "euclidienne", n'est pas la seule possible ; au XIXe siècle, le cinquième postulat d'Euclide, "Dans un plan, par un point distinct d'une droite, il existe une et une seule droite parallèle à cette droite" est remis en cause, en particulier par* CARL FRIEDRICH GAUSS. JANOS BOLYAI *et* NIKOLAÏ LOBATCHEVSKI *proposent le cas hyperbolique, où par un point il existe une infinité de parallèles à une droite donnée, et* BERNHARD RIEMANN *propose le cas elliptique, où il n'en existe aucune. Le premier cas est utilisé en physique quantique, et le second en relativité générale.*

Sir William Rowan Hamilton, mathématicien irlandais (1805-1865) fut le premier à employer le terme de vecteur dans les domaines de la mécanique et de la géométrie.[1]
Pour résoudre des problèmes géométriques, Descartes utilisait des coordonnées et traduisait une courbe géométrique par son équation. En Allemagne, Grassmann, autour des années 1840, développe une analyse géométrique indépendante du choix de coordonnées. Son point de départ est l'addition de forces, de vitesses, c'est-à-dire l'addition de vecteurs comme des segments orientés. Ses travaux le conduisirent à définir un produit de deux vecteurs. La poursuite de ses recherches, notamment grâce à Josiah Gibbs, Henri Poincaré et Elie Cartan, a eu des impacts dans divers domaines des mathématiques dont l'algèbre les espaces vectoriels.

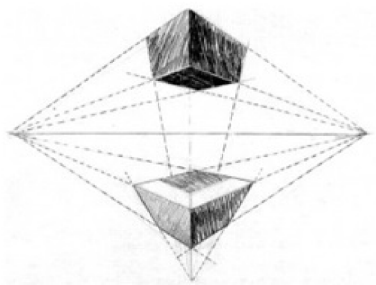
1. Rappels de Seconde sur la géométrie dans l'espace

Pour plus de précisions, vous pouvez vous référer au cours de Seconde, qui est disponible en ligne.

A. Perspective cavalière



Perspective cavalière

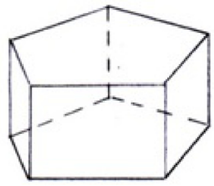
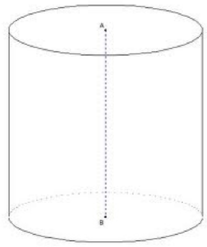
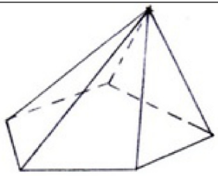
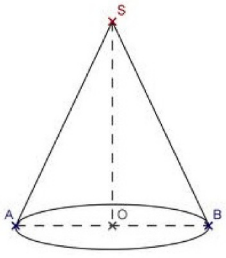
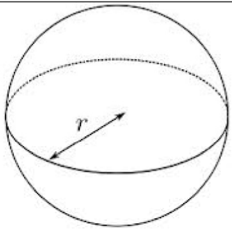


Perspective avec point de fuite

Dans une représentation en perspective cavalière, contrairement à la perspective artistique (avec point de fuite), les parallèles sont conservées. Sont aussi conservés les dimensions des objets vus de face, les milieux et l'alignement. On dessine en traits pleins les éléments apparents et en pointillés les éléments "cachés".

1. Hamilton inventa également les quaternions, qui sont une façon d'étendre les nombres complexes à des dimensions supérieures à 2, en posant $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

B. Solides usuels (formules à connaître)

Solide :	Figure :	Volume :	Aire :
Prisme droit		$V =$ Aire de la base $\times$ Hauteur	A_{base} : découper en triangles $A_{\text{latérale}}$: somme de rectangles
Cylindre de révolution		$V =$ Aire de la base $\times$ Hauteur	$A_{base} = \pi r^2$ $A_{\text{latérale}}$: aire d'un rectangle
Pyramide		$V = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$	A_{base} : découper en triangles $A_{\text{latérale}}$: somme de triangles
Cône		$V = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$	$A_{base} = \pi r^2$ $A_{\text{latérale}} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$
Sphère		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$A = 4\pi r^2$

C. Règles d'incidence

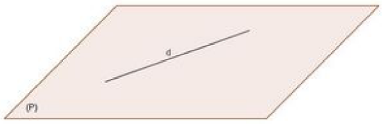
Propriété 4.1 Dans l'espace :
- par deux points distincts il passe une droite unique
- par trois points non alignés il passe un plan unique
- quatre points sont dits coplanaires s'ils sont dans un même plan
- il en est de même pour deux droites

Propriété 4.2 Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan $\mathscr{P}$, alors tous les points de (AB) appartiennent à $\mathscr{P}$. On dit que (AB) est incluse dans $\mathscr{P}$, et on note $(AB) \subset \mathscr{P}$.

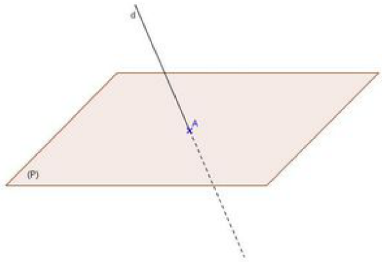
Remarque 4.1 Dans un plan de l'espace, toutes les propriétés de géométrie plane (th. de Pythagore, th. de Thalès, trigonométrie, etc...) s'appliquent.
Pour résoudre un problème de géométrie dans l'espace, on essaiera le plus souvent de se ramener dans un plan pour pouvoir appliquer ces théorèmes : c'est pour cela que l'on utilise des "figures extraites", qui ne représentent que le plan dans lequel on travaille.

D. positions relatives de droites et de plans

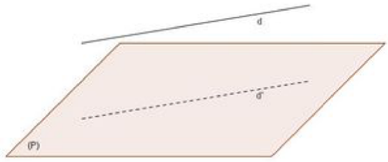
a. Positions relatives d'une droite et d'un plan



d est **contenue** dans le plan (P)

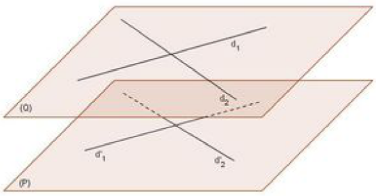


d est **sécante** au plan (P)

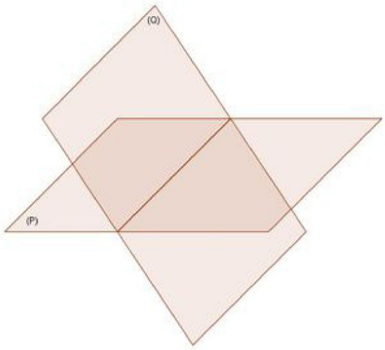


d est **parallèle** au plan (P)

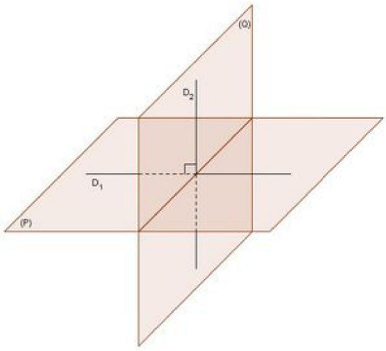
b. Positions relatives de deux plans



Les plans (P) et (Q) sont **parallèles**

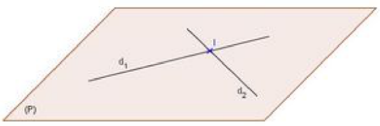


Les plans (P) et (Q) sont **sécants** (leur intersection est une droite)

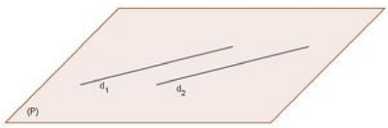


Les plans (P) et (Q) sont **perpendiculaires** (c'est un cas particulier de plans sécants)

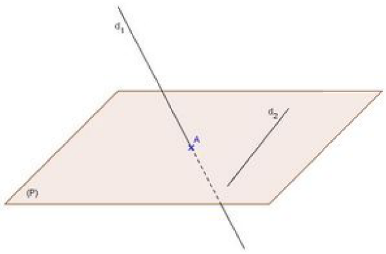
c. Positions relatives de deux droites



Les droites d_1 et d_2 sont **sécantes**, et donc coplanaires



Les droites d_1 et d_2 sont **parallèles** (et coplanaires)



Les droites d_1 et d_2 sont **non coplanaires**

Remarque 4.2 - Deux droites parallèles ou sécantes définissent un plan.
- Deux droites non coplanaires n'ont aucun point commun, mais ne sont pas pour autant parallèles !
- On peut aussi considérer les cas de deux droites confondues (qui sont nécessairement coplanaires), deux plans confondus etc...

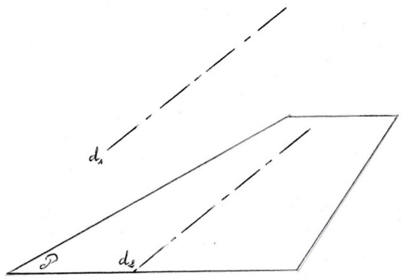
2. Propriétés

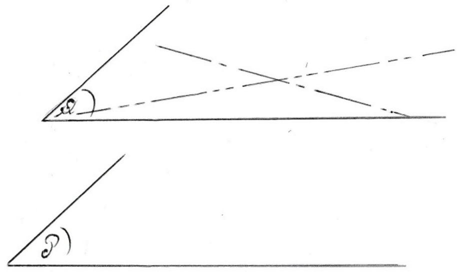
A. Rappels de Seconde : propriétés liées au parallélisme

Pour un catalogue plus exhaustif de ces propriétés, vous pouvez vous référer au cours de Seconde, qui est disponible en ligne.

Propriété 4.3 Si une droite d_1 est parallèle à une droite d_2 incluse dans un plan $\mathscr{P}$, alors d_1 est parallèle à $\mathscr{P}$.

Démonstration Le cas où $d_1 \subset \mathscr{P}$ est évident (un droite incluse dans un plan lui est parallèle "au sens large").
Si $d_1 \not\subset \mathscr{P}$, on considère le plan $\mathscr{Q}$ qui contient d_1 et d_2. L'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est donc d_2. Donc, d_1 et d_2 étant strictement parallèles, l'intersection entre d_1 et $\mathscr{P}$ est vide, donc d_1 est strictement parallèle à $\mathscr{P}$.





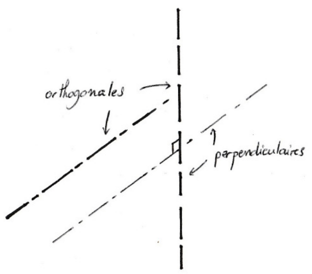
Propriété 4.4 Si deux droites sécantes d_1 et d_2 sont parallèles à un plan $\mathscr{P}$, alors le plan $\mathscr{Q}$ contenant les droites d_1 et d_2 est parallèle à $\mathscr{P}$.

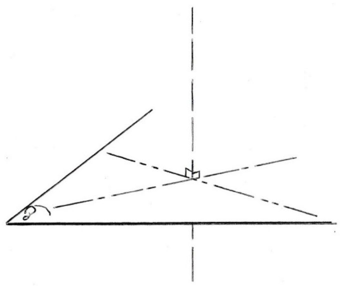
Démonstration Si $d_1 \subset \mathscr{P}$, alors $d_2 \subset \mathscr{P}$, donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont confondus.
Si d_1 et d_2 sont strictement parallèles à $\mathscr{P}$, on note δ l'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$. Si les plans sont sécants, δ est une droite et donc d'après le théorème du toit, δ est parallèle à d_1 et à d_1', la parallèle à d_1 contenue dans $\mathscr{P}$.
De même δ est parallèle à d_2 et à d_2', la parallèle à d_2 contenue dans $\mathscr{P}$.
Donc δ est parallèle à deux droites sécantes, ce qui est absurde - donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles.

B. Orthogonalité dans l'espace

Définition 4.1 Deux droites de l'espace sont orthogonales s'il existe une droite parallèle à l'une et perpendiculaire à l'autre.

Remarque 4.3 Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes ; en revanche, deux droites perpendiculaires le sont.





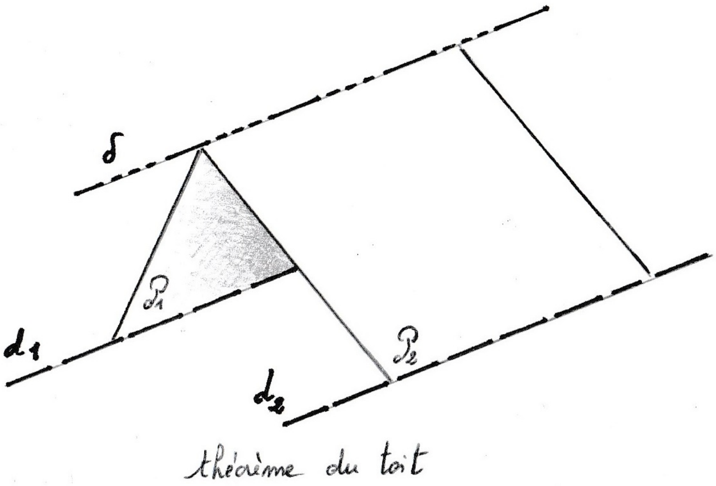
Définition 4.2 Une droite est dite orthogonale à un plan si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.

Propriété 4.5 Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Propriété 4.6 Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Propriété 4.7 :
- si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre ;
- si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles entre elles ;
- si deux plans sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'un est aussi perpendiculaire à l'autre.

Théorème 4.1 Théorème du Toit
Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles de l'espace, avec $d_1 \subset \mathscr{P}_1$ et $d_2 \subset \mathscr{P}_2$.
Si les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants suivant une droite δ, alors δ est parallèle à d_1 et à d_2.



Démonstration 1er cas (cas particulier simple)
Si d_1 et d_2 sont confondues, alors $\delta = d_1 = d_2$, et la conclusion est évidente.
2ème cas (cas général un peu plus compliqué - raisonnement par l'absurde) :
Supposons d_1 et d_2 parallèles et distinctes ("strictement parallèles").
d_1 et d_2 étant parallèles, elles définissent un plan (d'après la remarque 4.2). Notons Π le plan qui contient ces deux droites.
On veut montrer que $\delta // d_1$ et $\delta // d_2$, donc il suffit de montrer que $\delta // \Pi$.
En effet, si $\delta // \Pi$, δ ne coupe aucune des droites de Π, donc en particulier δ ne coupe ni d_1 ni d_2. Ainsi δ et d_1 seront non sécantes et incluses toutes deux dans $\mathscr{P}_1$, donc on aura bien $\delta // d_1$ (deux droites non sécantes d'un plan sont parallèles). On aura de la même manière $\delta // d_2$.
Nous voulons donc démontrer que $\delta // \Pi$. Raisonnons par l'absurde et supposons le contraire, à savoir que δ et Π sont sécants. Notons M le point d'intersection de δ et de Π. Alors $M \in \Pi$ et comme $M \in \delta$, $M \in \mathscr{P}_1$; donc M est sur l'intersection de Π et de $\mathscr{P}_1$, c'est-à-dire sur d_1.
On montre de la même manière que $M \in d_2$.
Finalement, $M \in d_1 \cap d_2$, ce qui est absurde car d_1 et d_2 sont strictement parallèles.
Notre supposition "δ coupe le plan Π en un point M" est donc absurde (puisqu'elle mène à un conclusion absurde), donc δ est strictement parallèle à Π. δ n'est donc sécante avec aucune des droites de Π. En particulier, δ n'est sécante ni avec d_1 ni avec d_2, et comme elle est coplanaire avec chacune de ces droites, respectivement dans $\mathscr{P}_1$ et dans $\mathscr{P}_2$, δ est donc parallèle à d_1 et d_2.

3. Combinaison linéaire de vecteurs, vecteurs coplanaires

Définition 4.3 Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, on appelle ***combinaison linéaire*** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ toute expression de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, où λ et μ sont deux réels quelconques.
On définit de même une combinaison linéaire de n vecteurs, $n \in \mathbb{N}$.

Définition 4.4 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{E}$. Soient A, B , C et D quatre points de $\mathscr{E}$ tels que :
$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$
On dit que les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi les points A, B, C et D sont dans un même plan.

De plus, lorsque l'on munit l'espace d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, si l'on considère les points $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ on a comme dans le plan :

- Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{array}\right.$

- Soient $\vec{u}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}$. Les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont : $\vec{u}+\vec{v}\begin{vmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{vmatrix}$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les coordonnées de $\lambda\vec{u}$ sont : $\lambda\vec{u}\begin{vmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{vmatrix}$
- Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont : $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- La norme du vecteur $\vec{u}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- La distance AB (i.e. la norme de $\overrightarrow{AB}$ est $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Propriété 4.8 Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi il existe trois réels a, b et c non tous nuls [a] tels que : $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$, c'est-à-dire s'il existe une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs.
On dira alors que la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est ***liée*** .

a. Ne pas confondre "non tous nuls" (il y en a au moins un non nul) et "tous non nuls" (aucun n'est nul)

Démonstration Si l'un des vecteurs est nul ou si deux des vecteurs sont colinéaires, alors tout se passe comme si l'on n'avait que deux vecteurs, et deux vecteurs sont toujours coplanaires (s'ils ne sont pas colinéaires, ils sont une base d'un plan).
On a posé $(a;b;c) \neq (0;0;0)$, i.e. l'un des nombres a, b, c n'est pas nul ; on ne perd pas en généralité en supposant $c \neq 0$ (quitte à intervertir les nombres a, b, c).
Il vient $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0} \Leftrightarrow \frac{a}{c}\vec{u}+\frac{b}{c}\vec{v}+\frac{c}{c}\vec{w} \Leftrightarrow \vec{w}=-\frac{a}{c}\vec{u}-\frac{b}{c}\vec{v}$, donc d'après la propriété 4.10, si on prend des représentants de même origine A des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, ces trois représentants sont coplanaires, donc ces trois vecteurs sont coplanaires.

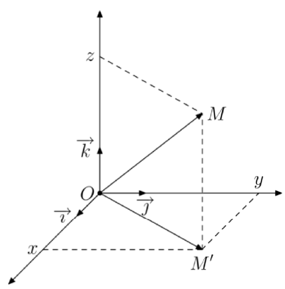
Remarque 4.4 (pour ceux qui "feront des maths plus tard") :
La contraposée de la propriété 4.8 est donc vraie également : si $(a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0} \Rightarrow a=b=c=0)$, alors les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires.
Une expression du type $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$ s'appelle une *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Lorsqu'il n'en existe aucune telle que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$ à moins que les coefficients a, b et c soient tous nuls, on dit que les trois vecteurs sont *linéairement indépendants* ou qu'ils forment une *famille libre*. Trois vecteurs linéairement indépendants forment une base (pas forcément orthonormée !) de l'espace (de dimension 3)... et n vecteurs linéairement indépendants formeront une base d'un espace de dimension n... !

4. Expression des vecteurs dans une base

Définition 4.5 Une base de l'espace $\mathscr{E}$ est un triplet de vecteurs $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ non coplanaires.
Tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathscr{E}$ s'exprime de façon unique $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ dans cette base.
Les nombres x, y et z sont les coordonnées (ou composantes) de $\vec{v}$. On note $\vec{v}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$.
Lorsque l'on a besoin de situer des points dans l'espace $\mathscr{E}$, on fixe une origine O et on obtient un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ dans lequel $\overrightarrow{OM}=\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, où M est l'extrémité du représentant de $\vec{v}$ d'origine O.

Remarque 4.5 On dit que la base (et donc le repère) est normée ssi $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$, orthogonale ssi les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux, et orthonormée ssi ces deux caractéristiques sont vérifiées.

Lorsque l'on travaille avec des vecteurs dans le plan, une base est formée de deux vecteurs non colinéaires $(\vec{i};\vec{j})$, un vecteur a 2 coordonnées dans cette base, on est en dimension 2.
Lorsque l'on travaille avec des vecteurs dans l'espace, une base est formée de trois vecteurs non coplanaires $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, un vecteur a 3 coordonnées dans cette base, on est en dimension 3.



Les propriétés de géométrie plane suivantes restent vraies dans l'espace :

Propriété 4.9
- Relations de Chasles : Pour tous points A, B et C de l'espace, $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont colinéaires ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ (ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, ce qui est équivalent à la formule précédente en prenant $\frac{1}{\lambda}$).
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Les points A, B, C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Les démonstrations de ces propriétés se font comme dans le plan, voir le cours de 1ère.
Rappel : Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

5. Caractérisation vectorielle d'une droite

Une droite de l'espace peut être définie par la donnée de deux points distincts, mais voici sa définition vectorielle :

Définition 4.6 Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

6. Caractérisation vectorielle d'un plan

Un plan peut être défini par la donnée de trois points non alignés, mais voici sa définition vectorielle :

Propriété 4.10 Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
L'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ est un plan passant par A.

Démonstration Soient B et C les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, (ABC) est un plan que l'on peut munir du repère $(A; \vec{u}; \vec{v})$. Dans ce repère, tout point M du plan (ABC) a un couple de coordonnées $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
Réciproquement, soient λ et μ deux réels et M le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. On note N le point tel que $\overrightarrow{AN} = \lambda\vec{u} = \lambda\overrightarrow{AB}$, donc $N \in (AB)$.
On a alors $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AM} = -\lambda\vec{u} + (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \mu\vec{v} = \mu\overrightarrow{AC}$. Donc M est sur la parallèle à (AC) passant par N (qui est dans le plan (ABC)), donc M est dans le plan (ABC).

Remarque 4.6 Un plan de l'espace peut donc être défini par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Propriété 4.11 Deux plans sont parallèles ssi deux vecteurs non colinéaires du premier sont respectivement égaux à deux vecteurs non colinéaires du second.
Une droite est parallèle à (ou incluse dans) un plan ssi un vecteur directeur de la droite est coplanaire avec deux vecteurs non colinéaires du plan.

7. Système d'équations paramétriques d'une droite

Soit d une droite de l'espace définie par le point $A(x_0; y_0; z_0)$ et par un vecteur directeur $\vec{u}\left|\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right.$.

$$\begin{aligned} M \in d &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + ka \\ y = y_0 + kb \\ z = z_0 + kc \end{cases} \end{aligned}$$

Où le symbole $\exists$ signifie "il existe".
On a donc le théorème suivant :

Théorème 4.2 La droite d passant par $A(x_0;y_0;z_0)$ et dirigée par $\vec{u}(a;b;c)$ est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que : $\begin{cases} x = x_0 + ka \\ y = y_0 + kb \\ z = z_0 + kc \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$.
Ce système d'équations est appelé représentation paramétrique de la droite d.

Exemple 4.1 Soit d la droite définie par $\begin{cases} x = 5 - k \\ y = -1 + 3k \\ z = 1 + k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$.

1. $A(3;5;2)$ est-il un point de d ?
2. Soient $B(1;6;0)$ et $C(3;0;-2)$. Les droites d et (BC) sont-elles parallèles ?
3. Déterminer une représentation paramétrique de (BC)

8. Système d'équations paramétriques d'un plan

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace défini par un point $A(x_A;y_A;z_A)$ et par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}\left|\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{array}{l} a' \\ b' \\ c' \end{array}\right.$. D'après la propriété 4.8, un point $M(x;y;z)$ appartient à $\mathscr{P}$ ssi il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Cette dernière égalité se traduit en coordonnées par : $M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = \lambda \times a + \mu \times a' \\ y - y_A = \lambda \times b + \mu \times b' \\ z - z_A = \lambda \times c + \mu \times c' \end{cases}$

On a donc le théorème suivant :

Théorème 4.3 Le plan $\mathscr{P}$ passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que : $\begin{cases} x = x_A + \lambda \times a + \mu \times a' \\ y = y_A + \lambda \times b + \mu \times b' \\ z = z_A + \lambda \times c + \mu \times c' \end{cases}$, où λ et μ sont deux réels.
Ce système d'équations est appelé représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$.

Exemple 4.2 Soit $\mathscr{P}$ le plan défini par $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -5 - \lambda + \mu \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- Déterminer les coordonnées d'un point A de $\mathscr{P}$ ainsi que de deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathscr{P}$.
- Les points $B(8;-5;5)$ et $C(2;-2;-3)$ sont-ils dans $\mathscr{P}$?
- Déterminer une représentation paramétrique du plan $\mathscr{Q}$ parallèle à $\mathscr{P}$ et contenant le point $D(5;3;-1)$.
- Démontrer que la droite d passant par $E(1;1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(4;-7;15)$ est parallèle à $\mathscr{P}$. Est-elle contenue dans $\mathscr{P}$?
- Démontrer que la droite d' passant par $F(2;2;2)$ et de vecteur directeur $\vec{w'}(5;1;3)$ est sécante à $\mathscr{P}$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection.